ECOLE SPECIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ECOLES SUPERIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MECANIQUE - ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1991

DEUXIEME INTERROGATION DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

NOTA : *Les cinq sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque, sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.*
Dans la rédaction des copies, les candidats sont priés de bien vouloir encadrer chacun des résultats correspondants aux éléments encadrés dans les énoncés, et ceux-ci seulement..

SUJET N°1

Pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout réel $x > 0$, on pose $F_n(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin^n t \, dt$.

1°) Montrer que cette intégrale généralisée converge.

2°) Calculer $\boxed{F_0(x)}$ et $\boxed{F_1(x)}$.

3°) En écrivant $F_n(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin^{n-1} t \, d(-\cos t)$, $n \geqslant 2$, et en utilisant l'intégration par partie, établir la relation $F_n(x) = \frac{n(n-1)}{n^2+x^2} F_{n-2}(x)$. En déduire la valeur de $F_5(x)$.

4°) Pour k et n entiers tels que $2 \leqslant k \leqslant n$, on introduit les intégrales

$$I_{n,k} = \int_0^{+\infty} x^{k-1} F_n(x) \, dx \quad , \quad S_{n,k} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n t}{t^k} \, dt .$$

On admet la convergence de ces intégrales, ainsi que la validité de l'interversion suivante des signes d'intégration:

$$\int_0^{+\infty} x^{k-1} \left(\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin^n t \, dt \right) dx = \int_0^{+\infty} \sin^n t \left(\int_0^{+\infty} e^{-xt} x^{k-1} \, dx \right) dt .$$

Exprimer $S_{n,k}$ au moyen de $I_{n,k}$.

5°) Déterminer les rationnels $\boxed{a}$, $\boxed{b}$ et $\boxed{c}$ tels que $S_{5,5} = a\pi$ et $S_{5,4} = b\ell n(3) + c\ell n(5)$, où ℓn désigne la fonction logarithme népérien.

SUJET N°2

Soit Σu_n la série de terme général $u_n = \frac{j^n}{n}$, $n \geqslant 1$, où j désigne la racine cubique de l'unité telle que $j = \exp(2i\pi/3)$, que l'on pourra aussi noter $e^{2i\pi/3}$ si l'on préfère.

On introduira, au besoin, la somme partielle $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

1°) Déterminer la nature de la série Σw_n , où $w_n = u_{3n-2} + u_{3n-1} + u_{3n}$.

2°) Au moyen de ce résultat, ou autrement, déduire que la série Σu_n converge.

3°) A toute suite (a_n) de période 3 (c'est-à-dire : $a_{n+3} = a_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$), réelle ou complexe, on associe la série Σz_n , avec $z_n = \frac{a_n}{n}$, dont on pourra noter T_n la somme partielle $z_1 + z_2 + \ldots + z_n$.
En s'inspirant de l'étude précédente, démontrer que la série Σz_n converge si, et seulement si, $a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

4°) Soit Σz_n une série du type précédent, avec $a_1 + a_2 + a_3 = 0$. En utilisant l'égalité $\int_0^1 t^{k-1}dt = 1/k$, où k est un entier positif, établir la formule

$$T_{3n} = \int_0^1 \frac{a_1 - a_3 t}{1+t+t^2} (1-t^{3n})\, dt \ .$$

En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \int_0^1 \frac{a_1 - a_3 t}{1+t+t^2}\, dt$.

5°) Calculer alors le nombre complexe S, somme de la série Σu_n , tel donc que $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$
On en précisera la partie réelle $\boxed{X}$ et la partie imaginaire $\boxed{Y}$, $S = X + iY$.

SUJET N°3

On pose $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ pour tout x réel appartenant à l'intervalle $]-\pi/2 ; \pi/2[$. Il sera approprié, parfois, d'abréger "cos x" par "c" et "sin x" par "s". Ainsi, $f(x) = 1/c$.

1°) Calculer les deux premières dérivées $f'(x)$ et $f''(x)$ de $f(x)$, et vérifier qu'elles peuvent s'exprimer sous les formes respectives $P_1(s)\, c^{-2}$ et $P_2(s)\, c^{-3}$, où $\boxed{P_1}$ et $\boxed{P_2}$ sont des polynômes que l'on précisera.

2°) Plus généralement , montrer que la dérivée d'ordre n de f , notée $f^{(n)}(x)$, peut s'écrire sous la forme $P_n(s)\, c^{-n-1}$, où P_n est un polynôme de degré n.

3°) Que vaut $\boxed{P_n(1)}$?

4°) On introduit les coefficients $A(n,k)$ du polynôme P_n , tels donc que $P_n(s) = \sum_{k=0}^{n} A(n,k)s^k$.
Montrer qu'ils sont positifs ou nuls.

5°) Grâce à ces résultats, ou autrement, montrer que $f(x)$ est développable en série entière au voisinage de 0 .
Pour ce faire, dans la formule de Taylor

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(x) \ ,$$

on montrera que le reste $R_n(x)$ (de "Lagrange" ou "intégral") tend vers 0 quand n tend vers l'infini, pour tout x d'un certain intervalle contenant le point 0 .

A SUIVRE

SUJET N°4

1°) Soit P le polynôme réel tel que $P(X) = X^3 + X^2 + X - 1$. Montrer qu'il admet une seule racine réelle r dans l'intervalle ouvert $]\ 0,1\ [$.

2°) On note c la racine complexe de P , dont la partie imaginaire est strictement positive. Exprimer la partie réelle $\boxed{u}$ de c comme un polynôme de degré 1 en r .

3°) Soit F la fraction rationnelle telle que $F = -\frac{1}{P}$. Préciser, en fonction de r , c et $\bar{c}$ les coefficients A_1, A_2 , A_3 de la décomposition en éléments simples de la fraction F, sous la forme suivante :

$$F(x) = \frac{A_1}{1-\frac{X}{r}} + \frac{A_2}{1-\frac{X}{c}} + \frac{A_3}{1-\frac{X}{\bar{c}}}$$

Exprimer $\boxed{1/A_1}$ comme un polynôme de degré 2 en r .

4°) Soit f la fonction de la variable complexe z , telle que $f(z) = (1-z-z^2-z^3)^{-1}$. Montrer qu'elle est développable en série entière $\Sigma a_n z^n$, avec un rayon de convergence égal à r .

Déterminer a_n en fonction de A_1 , A_2 , A_3 , r , c , $\bar{c}$, n .

Démontrer que , pour $n \geqslant 3$, on a : $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$.

Quelle est la limite $\boxed{\ell}$ de la suite (w_n) telle que $w_n = a_n - A_1 r^{-n}$?

5°) On appelle b_n le nombre d' "affranchissements" à n francs d'une lettre avec des timbres à 1 fr, 2 fr et 3 fr, avec la convention $b_0 = 1$. L'ordre des timbres, alignés sur l'enveloppe supposée suffisamment longue, intervient. Par exemple, $b_4 = 7$, car les affranchissements à 4 fr sont 1111 , 112 , 121 , 211 , 13 , 31 , 22 .

Calculer b_2 et b_3 , et comparer à a_2 et a_3 . Que peut-on dire de b_n ?

SUJET N°5

Dans ce qui suit, la notation E(x) désignera la "partie entière de x" (x réel), c'est-à-dire le plus grand entier n inférieur ou égal à x . En d'autres termes,

(*) $\{\ n = E(x)\ \} <=> \{\ n \in \mathbb{Z}$ et $n \leqslant x < n+1\ \}$.

Pour tout réel $r > 0$, f_r est la fonction telle que $f_r(x) = E(r\sqrt{x})$ $(x$ réel $\geqslant 0)$.

1°) Montrer que les points de discontinuité de f_r sont les réels de la forme n^2/r^2, où n prend toutes valeurs entières positives.

2°) Soit g la fonction ainsi définie pour tout réel x :

$$g(x) = 2f_a(x) - f_b(x) - f_c(x) \ , \quad \text{avec} \quad a = 1/\sqrt{2} \ , \quad b = \sqrt{2} - 1 \ , \quad c = 1 \ .$$

Donner sa représentation graphique sur l'intervalle $[0\ ;10]$.

3°) Montrer que -1 , 0 , 1 sont les seules valeurs possibles de g(x) . On pourra, à cet effet, utiliser la définition de f_a , de f_b et de f_c au moyen de la relation (*).

4°) On constate que, sur $[0\ ;\ 10]$, g ne présente que des "sauts de discontinuité" , de -1 (comme en x=1 ou x=4) , ou de $+2$ (comme en x=8) . Démontrer qu'en fait, tous les sauts de g sur $[0\ ;+\infty[$ sont de ce type. Pour ce faire, on pourra déterminer les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) des abscisses respectives des sauts de f_a , de f_b et de f_c .

5°) Sur tout intervalle $[\ A\ ;+\infty[$, la fonction g prend-elle chacune des valeurs -1 , 0 , 1 ?

—— 0 ——

FIN